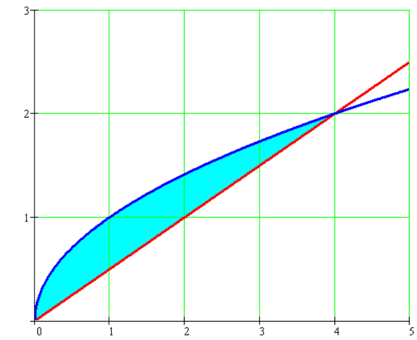
Задача 1. Вычислить массу однородной плоской пластины, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$ и $y=\frac{x}{2}$, плотность пластины равна 1.



Решение

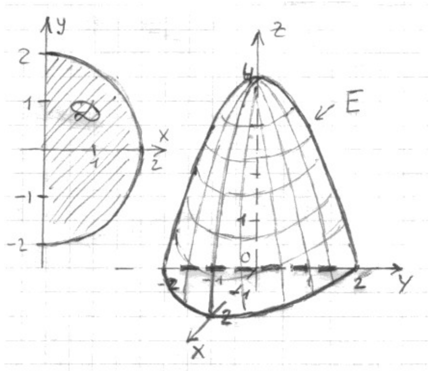
Изобразим пластинку на рисунке.

Масса:

$$m = \iint \rho(x,y)\,dxdy = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} y\,dy = \int_0^4 \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) dx = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24}\right)\Bigg|_0^4 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=4-x^2-y^2$, $z=0$.



Решение

Объем цилиндроида:

$$V = \iint_Д f(x,y)\,dxdy = \iint_Д \left(4 - x^2 - y^2\right) dxdy = \left| \begin{matrix} Перейдем\ к\ полярным\ координатам: \\ x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_G \left(4 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi\right) d\varphi\, r\,dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \left(4 - r^2\right) r\,dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \left(4r - r^3\right) dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi =$$

$$= \varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot (8 - 4) = 4\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi \ (куб.ед.)$$

Задача 3. Вычислить работу силы $\vec{F} = (xy - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ вдоль кривой $y=x^2$ от точки A(0;0) до точки B(1;2).

Решение

Искомая работа:

$$A = \int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta \left[P(x,f(x)) + Q(x,f(x))\cdot f'(x)\right] dx = \left| \begin{matrix} P(x,y) = xy - y^2 \\ Q(x,y) = x \\ f(x) = 2x^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^1 \left(x2x^2 - \left(2x^2\right)^2 + x4x\right) dx = 2\int_0^1 \left(-2x^4 + x^3 + 2x\right) dx = 2\left(-\frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + x^2\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{4}{5} + \frac{1}{2} + 2 =$$

$$= 1{,}7$$

Задача 4. du=(10xy-8y)dx+(5x^2-8x+3)dy, найти U.

Решение

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \Rightarrow \begin{cases} u_x' = 10xy - 8y \\ u_y' = 5x^2 - 8x + 3 \end{cases}$$

$$u(x, y) = \int u_x' dx = 10\frac{x^2}{2}y - 8xy + C(y) = 5x^2 y - 8xy + C(y)$$

Так как $u_y' = 5x^2 - 8x + 3 \Rightarrow \ '(y) = 3 \Rightarrow \ (y) = 3y +$

Итак, $u(x, y) = 5x^2 y - 8xy + \ 3y + \ ,$ *где* $C - \ onst$.

Задача 5. Исследовать векторное поле $\vec{a} = 6xy\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j} + \ \vec{k}$ на потенциальность и, в случае потенциальности, найти его потенциал.

Решение

$$P = \ xy;\ Q = \ x^2 - \ y;\ R = \ ;\ \frac{\partial}{\partial} = \ = \frac{\partial}{\partial};\ \frac{\partial}{\partial} = \ = \frac{\partial}{\partial};\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow rot\vec{a} = 0 \Rightarrow$$

Так как $rot\vec{a} =$ и поле $\vec{a}$ определено и дифференцируемо во всех точках пространства $\Rightarrow$ поле $\vec{a}$ потенциально, его потенциал

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} (x, y, z)\Big|_{\substack{y= \\ z=}} dx + \int_{y_0}^{y} (x, y, z)\Big|_{z=} dy + \int_{z_0}^{z} (x, y, z)dz + \ = (x_0; y_0; z_0) = (0;0;0) =$$

$$= \int_0^x 0dx + \int_0^y (x^2 - 2y)dy + \int_0^z \ dz = \left(3x^2 y - \frac{2y^2}{2}\right)\Big|_0 + \frac{z^2}{2}\Big|_0^z + \ = 3x^2 y - \ ^2 + \frac{z^2}{2} +$$

Задача 6. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \ y\vec{i} + \ x\vec{j}$ вдоль линии $\cos^2 t + \ in^2 t =$

Решение

$$Ц_L() = \int_L Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta (P((\ ), y(\ )) \cdot x'(\ ) + Q((\ ), y(\ )) \cdot y'(\ ))dt = \left| \begin{matrix} \begin{cases} x = \ \cos t \\ y = \ \sin t \end{cases} \\ P(x, y) = \ y \\ Q(x, y) = \ x \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\ \cdot 3\sin t(\cos t)' + \ \cdot 3\cos t(\sin t)')dt = \ \int_0^{2\pi} (\sin t(- \ \sin t) + \ os t \cdot 3\cos t)dt =$$

$$= - \ 8\int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \ in^2 t)dt = - \ 8\int_0^{2\pi} \ os 2t\, dt = - \ \int_0^{2\pi} \ os 2t\, d(\ t) = \ \cdot \ in 2t\Big|_0^{2\pi} = - \ + \ =$$

Задача 7. Исследовать данный числовой ряд на сходимость

Решение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{6^n + 3^n + 1}$$

Радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{6^n + 3^n + 1} \cdot \frac{6^{n+1} + 3^{n+1} + 1}{3^{n+1}}\right| = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{6 \cdot 6^n + 3 \cdot 3^n + 1}{6^n + 3^n + 1} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to} \frac{6+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{6+0+0}{1+0+0}=3\Rightarrow$$ интервал сходимости: $x\in\ -\ ;2)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x = 2$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{6^n+3^n+1}$

$$\lim_{n\to}\frac{6^n}{6^n+3^n+1}=\lim_{n\to}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n}=\frac{1}{1+0+0}=1\neq0\Rightarrow$$ не выполняется

необходимое условие сходимости ряда, следовательно, ряд расходится.

При $x = -$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{6^n}{6^n+3^n+1}$

$$\lim_{n\to}\left|(-1)^n\frac{6^n}{6^n+3^n+1}\right|=\lim_{n\to}\frac{6^n}{6^n+3^n+1}=1\neq0\Rightarrow$$ ряд расходится.

Следовательно, область сходимости: $x\in\ -\ ;2)$.

Задача 2. Вычислить $\int_0^1 {}^{-\frac{x^2}{2}}dx$ с точностью до 0,001

Решение

Разложение в ряд Маклорена:

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\ldots\Rightarrow\ e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot2!}-\frac{x^6}{2^3\cdot3!}+\ldots\Rightarrow$$

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\left(x-\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^5}{2^2\cdot2!\cdot5}-\frac{x^7}{2^3\cdot3!\cdot7}+\ .\right)\Big|_0^1\Rightarrow\ -\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2^2\cdot2!\cdot5}-\frac{1}{2^3\cdot3!\cdot7}+\frac{1}{2^4\cdot4!\cdot9}-\ .=$$

$$=\ -\frac{1}{6}+\frac{1}{40}-\frac{1}{336}+\frac{1}{3456}-\ .\approx\ -\frac{1}{6}+\frac{1}{40}-\frac{1}{336}=0{,}855$$

Ограничились вычислением частичной суммы S_4 сходящегося знакочередующегося ряда, так как $|u_5|=\frac{1}{3456}<0{,}001$.