**Задача 1.** Исследовать СЛУ на совместность $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=9 \\ 2x_1+5x_2-3x_3=4 \\ 5x_1+6x_2-2x_3=18 \end{cases}$ и решить ее:

1) по формулам Крамера;

2) с помощью обратной матрицы, проверить является ли найденная матрица обратной.

**Решение**

$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=4\cdot8+3\cdot11+2\cdot(-13)=39\neq0\Rightarrow$ система совместна и имеет единственное решение.

1)

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \\ 18 & 6 & -2 \end{vmatrix}=9\cdot\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 18 & -2 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}=9\cdot8+3\cdot46+2\cdot(-66)=78$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 18 & -2 \end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 18 & -2 \end{vmatrix}-9\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 18 \end{vmatrix}=4\cdot46+9\cdot11+2\cdot16=117$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 9 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 18 \end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 18 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 18 \end{vmatrix}+9\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=4\cdot66+3\cdot16+9\cdot(-13)=195$$

По формулам Крамера: $x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta},\ i=\overline{1,3}\Rightarrow x_1=2;x_2=3;x_3=5.$

2)

$A_{11}=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=8$ $\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=6$ $\qquad A_{31}=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=-1$

$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=-11$ $\qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=-18$ $\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=16$

$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-13$ $\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-39$ $\qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=26.$

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=\frac{1}{39}\cdot\begin{bmatrix} 8\cdot9+6\cdot4-1\cdot18 \\ -11\cdot9-18\cdot4+16\cdot18 \\ -13\cdot9-39\cdot4+26\cdot18 \end{bmatrix}=\frac{1}{39}\cdot\begin{bmatrix} 78 \\ 117 \\ 195 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{bmatrix}\cdot\left(\frac{1}{39}\cdot\begin{bmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{bmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{39}\cdot\begin{bmatrix} 4\cdot8-3\cdot(-11)+2\cdot(-13) & 4\cdot6-3\cdot(-18)+2\cdot(-39) & 4\cdot(-1)-3\cdot16+2\cdot26 \\ 2\cdot8+5\cdot(-11)-3\cdot(-13) & 2\cdot6+5\cdot(-18)-3\cdot(-39) & 2\cdot(-1)+5\cdot16-3\cdot26 \\ 5\cdot8+6\cdot(-11)-2\cdot(-13) & 5\cdot6+6\cdot(-18)-2\cdot(-39) & 5\cdot(-1)+6\cdot16-2\cdot26 \end{bmatrix}=\frac{1}{39}\begin{bmatrix} 39 & 0 & 0 \\ 0 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 39 \end{bmatrix}=E$$

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{39}\cdot\begin{bmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{39}\cdot\begin{bmatrix} 8\cdot4+6\cdot2-1\cdot5 & 8\cdot(-3)+6\cdot5-1\cdot6 & 8\cdot2+6\cdot(-3)-1\cdot(-2) \\ -11\cdot4-18\cdot2+16\cdot5 & -11\cdot(-3)-18\cdot5+16\cdot6 & -11\cdot2-18\cdot(-3)+16\cdot(-2) \\ -13\cdot4-39\cdot2+26\cdot5 & -13\cdot(-3)-39\cdot5+26\cdot6 & -13\cdot2-39\cdot(-3)+26\cdot(-2) \end{bmatrix}=\frac{1}{39}\begin{bmatrix} 39 & 0 & 0 \\ 0 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 39 \end{bmatrix}=E$$

**Задача 2.** $A_1(1;3;6);A_2(2;2;1);A_3(-1;0;1);A_4(-4;6;-3)$

1) найти угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$;

2) площадь грани $A_1A_2A_3$;

3) объем пирамиды;

4) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

**Решение**

1) $\overrightarrow{A_1A_2} = (2-1;2-3;1-6) = (1;-1;5);$ $\overrightarrow{A_1A_4} = (-4-1;6-3;-3-6) = (-5;3;-9);$

$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{1^2+(-1)^2+(-5)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3};$ $\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \sqrt{(-5)^2+3^2+(-9)^2} = \sqrt{115};$

$$\cos(\angle\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_4}) = \frac{(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_4})}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{1\cdot(-5)-1\cdot3-5\cdot(-9)}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{115}} = \frac{37}{3\sqrt{345}} \Rightarrow \angle\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_4} =$$

$$= \arccos\left(\frac{37}{3\sqrt{345}}\right) \approx 48^0 24'$$

2) $\overrightarrow{A_1A_3} = (-1-1;0-3;1-6) = (-2;-3;-5).$ $S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\operatorname{mod}[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}]$

$$[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} - \bar{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + \bar{k}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -10\cdot\bar{i} + 15\cdot\bar{j} - 5\cdot\bar{k} \Rightarrow$$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2+15^2+(-5)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2^2+3^2+1^2} = \frac{5\sqrt{14}}{2}\,(\text{кв.ед.})$$

**3)**

$$(\overrightarrow{A_1A_4},\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}) = \begin{vmatrix} -5 & 3 & -9 \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -5\cdot(-10) - 3\cdot(-15) - 9\cdot(-5) = 140$$

$$V_{\Delta A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\operatorname{mod}(\overrightarrow{A_1A_4},\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}) = \frac{70}{3}\,(\text{куб.ед.})$$

4) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ запишем по точке $A_1$ и двум неколлинеарным векторам $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$-10\cdot(x-1) + 15\cdot(y-3) - 5\cdot(z-6) = 0$; $2\cdot(x-1) - 3\cdot(y-3) + z - 6 = 0$; $2\cdot x - 3\cdot y + z + 1 = 0$.

**Задача 3.** Вычислить пределы:

**Решение**

1а)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+5}{4x^3-x+2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{4-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = \frac{1+0+0+0}{4-0+0} = 0.25$$

1б)

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to2}\frac{(x+2)}{x} = \frac{2+2}{2} = 2$$

1в)

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2} = \frac{9}{2}\left(\lim_{x\to2}\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2 = 4{,}5\cdot1^2 = 4{,}5$$

P.S. Воспользовались первым замечательным пределом.

2)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x-4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x+1)-4}{2x+1}\right)^{3x-4}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+1}\right)^{3x-4}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-4}}\right)^{\frac{2x+1}{-4}}\right)^{\frac{4(3x-4)}{2x+1}}=$$

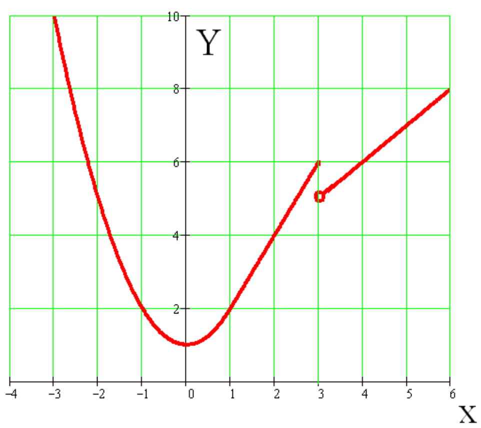
$$=e^{-4\cdot\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-4}{2x+1}}=e^{-4\cdot\lim\limits_{x\to 2}\frac{3-\frac{4}{x}}{2+\frac{1}{x}}}=e^{-4\cdot\frac{3-0}{2+0}}=e^{-6}$$

P.S. Был использован второй замечательный пределом.

**Задача 4.** Исследовать функцию f(x)= $\begin{cases} x^2+1, x\le 1; \\ 2x, 1<x\le 3; \\ x+2, x>3. \end{cases}$ на непрерывность, указать вид точек разрыва.

**Решение**

Функции $f_1(x)=x^2+1$, $f_2(x)=2x$ и $f_3(x)=x+2$ непрерывны при $x\in R \Rightarrow f(x)$ может терпеть разрыв лишь в точках $x_1=1$ и $x_2=3$, где меняется аналитическое задание функции $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x^2+1)=1^2+1=2=f(1)$; $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(2x)=2\cdot 1=2=2$.




Так как $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=f(1)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)\Rightarrow x=1$ - точка непрерывности.

$\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-0}(2x)=2\cdot 3=6=f(3)$;

$\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+0}(x+2)=5$.

Так как $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)$, но односторонние пределы конечны, то $x=3$ точка разрыва первого рода (точка конечного скачка) $\Rightarrow f(x)$ непрерывна при $x\in R\setminus\{3\}$.

**Задача 5.** Найти производные заданных функций.

**Решение**

1а)

$$y'=(\sin^2 2x)'-(\sqrt{x+1}\cdot\ln 5x)'=2\sin 2x\cdot(\sin 2x)'-((\sqrt{x+1})'\cdot\ln 5x+\sqrt{x+1}\cdot(\ln 5x)')=$$

$$=2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot(2x)'-\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\ln 5x+\sqrt{x+1}\cdot\frac{1}{5x}\cdot(5x)'\right)=2\sin 4x-\frac{\ln 5x}{2\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

1б)

$$\ln y=tgx\ln(x-1)\Rightarrow\frac{y'}{y}=(tgx)'\ln(x-1)+tgx\cdot(\ln(x-1))'\Rightarrow y'=y\left(\frac{1}{\cos^2 x}\ln(x-1)+tgx\cdot\frac{1}{x-1}\right)\Rightarrow$$

$$y'=(x-1)^{tgx}\left(\frac{\ln(x-1)}{\cos^2 x}+\frac{tgx}{x-1}\right)$$

1в)

$x+y=\sin xy$. Дифференцируем уравнение, считая $y=f(x)$

$$1+y'=\cos xy\cdot(xy)'\Rightarrow 1+y'=\cos xy(1\cdot y+x\cdot y')\Rightarrow y'-y'\cdot x\cos xy=y\cos xy-1\Rightarrow y'=\frac{y\cos xy-1}{1-x\cos xy}$$

2) $\begin{cases} x=t+\ln t \\ y=t-\ln t \end{cases}$

$$x_t' = 1 + \frac{1}{t}; \quad y_t' = 1 - \frac{1}{t}; \quad \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\frac{t-1}{t}}{\frac{t+1}{t}} = \frac{t-1}{t+1};$$

Так как $y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t'}$, то $\begin{cases} y_x' = \dfrac{t-1}{t+1} \\ x = t + \ln t \end{cases}$