Задача 1. z= arctg(2x-y); вычислить F=$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial z}{\partial y}$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(2x-y)^2}\cdot(2x-y)'_x=\frac{2}{1+(2x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\cdot\left(-\frac{\left(1+(2x-y)^2\right)'_x}{\left(1+(2x-y)^2\right)^2}\right)=-2\cdot\frac{0+2(2x-y)\cdot(2x-y)'_x}{\left(1+(2x-y)^2\right)^2}=-\frac{8(2x-y)}{\left(1+(2x-y)^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(2x-y)^2}\cdot(2x-y)'_y=\frac{-1}{1+(2x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{-1}{1+(2x-y)^2}\right)'_x=-\frac{(-2)(2x-y)\cdot(2x-y)'_x}{\left(1+(2x-y)^2\right)^2}=\frac{4(2x-y)}{\left(1+(2x-y)^2\right)^2}$$

$$F=-\frac{8(2x-y)}{\left(1+(2x-y)^2\right)^2}-\frac{8(2x-y)}{\left(1+(2x-y)^2\right)^2}-\frac{3}{1+(2x-y)^2}=-\frac{16(2x-y)+3\left(1+(2x-y)^2\right)}{\left(1+(2x-y)^2\right)^2}$$

Задача 2. U=xy-x^2z^2+y^2+z; A= (4;-1; 2); $\vec{a}$ = (2; 1;-2). Вычислить градиент U в точке A, производную по направлению $\vec{a}$ =(2; 1;-2) в точке A.

Решение

1)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y-2xz^2;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=x+2y;\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-2x^2z+1;$$

$$grad\,u\big|_A=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A\cdot\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A\cdot\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A\cdot\vec{k}=\left(-1-2\cdot4\cdot2^2\right)\cdot\vec{i}+\left(4+2\cdot(-1)\right)\cdot\vec{j}+\left(-2\cdot4^2\cdot2+1\right)\cdot\vec{k}=$$

$$=-33\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-63\cdot\vec{k}$$

2)

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}\Big|_A=\left(grad\,u\big|_A,\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)=\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}\left(-33\cdot2+2\cdot1-63\cdot(-2)\right)=\frac{62}{3}$$

Задача 3. Вычислить неопределенные интегралы, произвести проверку.

Решение

1)

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}-2x^3}{x}dx=\int\left(x^{-\frac{2}{3}}-2x^2\right)dx=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}-\frac{2x^3}{3}+C=3\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3}x^3+C$$

Проверка:

$$\left(3\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3}x^3+C\right)'=3\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\cdot3x^2+0=x^{-\frac{2}{3}}-2x^2=\frac{x^{\frac{1}{3}}-2x^3}{x}=\frac{\sqrt[3]{x}-2x^3}{x}$$

2)

$$\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=\int\sin^{-3}x\,d(\sin x)=\frac{\sin^{-2}x}{-2}+C=-\frac{1}{2\sin^2 x}+C;$$

Проверка:

$$\left(-\frac{1}{2}\sin^{-2}x + C\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\left(-2\sin^{-3}x\right)(\sin x)' + 0 = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$$

3)

$$\int 2x^2\sin 4x\,dx = \left|\begin{array}{l} \textit{Интегрируем по частям}: \\ \int u\,dv = uv - \int v\,du;\quad u = 2x^2 \Rightarrow du = 4x\,dx; \\ dv = \sin 4x\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{array}\right| = -\frac{x^2}{2}\cos 4x + \int x\cos 4x\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx;\quad dv = \cos 4x\,dx; \\ v = \frac{1}{4}\sin 4x \end{array}\right| = -\frac{x^2}{2}\cos 4x + \frac{x}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\int \sin 4x\,dx =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\cos 4x + \frac{x}{4}\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C$$

Проверка

$$\left(-\frac{x^2}{2}\cos 4x + \frac{x}{4}\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C\right)' = -x\cos 4x + 2x^2\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 4x + x\cos 4x - \frac{1}{4}\sin 4x + 0 =$$

$$= 2x^2\sin 4x$$

4)

$$\int \frac{4x+1}{x^2+4x}dx = \left|\begin{array}{l} \textit{Разложим подинтегральную дробь на элементарные}: \\ \frac{4x+1}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} = \frac{(A+B)x+4A}{x(x+4)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ 4A=1 \end{cases} \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x} + \frac{15}{4}\int\frac{d(x+4)}{x+4} = \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{15}{4}\ln|x+4| + C$$

Проверка

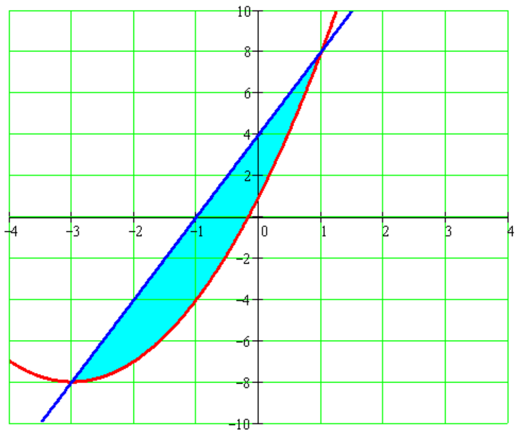
$$\left(\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{15}{4}\ln|x+4| + C\right)' = \frac{1}{4x} + \frac{15}{4(x+4)} + 0 = \frac{x+4+15x}{4x(x+4)} = \frac{4x+1}{x^2+4x}$$

Задача 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями

Решение

$y = x^2 + 6x + 1$ и $y = 4x + 4$

Изобразим заданную фигуру на рисунке.



$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx = \int_{-3}^{1}\left(3 - 2x - x^2\right)dx =$$

$$= \left(3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{1} = 3 - 1 - \frac{1}{3} - (-9 - 9 + 9) =$$

$$== 2 - \frac{1}{3} + 9 = \frac{32}{3}\,(\textit{кв.ед.})$$

Задача 5.Найти общий интеграл данного Д.У.:

Решение

$xy'\sin\frac{y}{x} + x = y\sin\frac{y}{x}$ - однородное дифференциальное уравнение, $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$,
тогда: $x(u'x + u)\sin u + x = ux\sin u$.

Так как $x \neq 0: u'x\sin u + u\sin u + 1 = u\sin u; \frac{x\sin u\, du}{dx} = -1 \Rightarrow \sin u\, du = -\frac{dx}{x}$

Интегрируя обе части дифференциального уравнения: $-\cos u = -\ln|x| - C \Rightarrow \cos\frac{y}{x} = \ln|x| + C$ - общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Задача 6. Найти общее решение линейного неоднородного Д.У.:
y”+2y’+5y=$e^x((x+1)\cos 2x + 3\sin 2x)$

Решение

Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0; D_1 = -4 \Rightarrow k_{1,2} = -1 \pm 2i$ - 2 комплексно-сопряженных корня $\Rightarrow$ общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения: $y_0 = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. Так как $1 + 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение исходного дифференциального уравнения имеет вид: $y_1 = e^x((Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x)$.

$y_1' = e^x((Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x) + e^x(A\cos 2x - 2(Ax + B)\sin 2x + C\sin 2x + 2(Cx + D)\cos 2x) =$
$= e^x((Ax + 2Cx + A + B + 2D)\cos 2x + (-2Ax + Cx - 2B + C + D)\sin 2x)$

$$y_1'' = e^x((Ax + 2Cx + A + B + 2D)\cos 2x + (-2Ax + Cx - 2B + C + D)\sin 2x) +$$
$$+ e^x((A + 2C)\cos 2x - 2(Ax + 2Cx + A + B + 2D)\sin 2x + (-2A + C)\sin 2x +$$
$$2(-2Ax + Cx - 2B + C + D)\cos 2x) = e^x((-3Ax + 4Cx + 2A - 3B + 4C + 4D)\cos 2x +$$
$$+ (-4Ax - 3Cx - 4A - 4B + 2C - 3D)\sin 2x)$$

Так как $y_1'' + 2y_1' + 5y_1 = e^x((x+1)\cos 2x + 3\sin 2x) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 4A + 8C = 1 \\ 4A + 4B + 4C + 8D = 1 \\ -8A + 4C = 0 \\ -4A - 8B + 4C + 4D = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 20A = 1 \\ 12A + 4B + 8D = 1 \\ C = 2A \\ 4A - 8B + 4D = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{20} \\ 4B + 8D = \frac{2}{5} \\ C = \frac{1}{10} \\ -8B + 4D = \frac{14}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{20} \\ 20D = \frac{18}{5} \\ C = \frac{1}{10} \\ 20B = -\frac{26}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{20} \\ D = \frac{9}{50} \\ C = \frac{1}{10} \\ B = -\frac{13}{50} \end{cases}$$

Итак,

$$y = y_0 + y_1 = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + e^x\left(\left(\frac{1}{20}x - \frac{13}{50}\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{9}{50}\right)\sin 2x\right).$$

Задача 7. Решить систему Д.У.

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение: $x'' = 4x' - y'$, подставляя $y' = x + 2y$: $x'' = 4x' - x - 2y$.

Из первого уравнения: $y = 4x - x' \Rightarrow x'' = 4x' - x - 8x + 2x' \Rightarrow x'' - 6x' + 9x = 0$.

Характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow (k-3)^2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 3 \Rightarrow x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{3t}$$

$$y(t) = 4x(t) - x'(t) = (4C_1 + 4C_2 t)e^{3t} - \left(C_2 e^{3t} + (3C_1 + 3C_2 t)e^{3t}\right) = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^{3t}$$

Итак,

$$\begin{cases} x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{3t} \\ y(t) = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^{3t} \end{cases}$$ - общее решение данной системы